

Les corrélations diagonales du modèle d'Ising 2d: Solutions Fuchsiennes de l'équation de Painlevé VI

S. Boukraa *Blida, Algerie* ,
S. Hassani *Centre de Recherche Nucléaire d'Alger* ,
B. Mac Coy *Institute for Theoretical Physics, Stony Brook* ,
J.-M. Maillard *LPTMC, Université de Paris 6* ,
Jacques-Arthur Weil *XLIM, Limoges* ,
N. Zenine *Centre de Recherche Nucléaire d'Alger*

Séminaire Rennes, Avril 2006

Outline

- 1 Motivation : les corrélations du modèles d'Ising
 - le modèle d'Ising
 - les corrélations $C(N, N)$ du modèle d'Ising 2 – D
- 2 Equations différentielles pour les corrélations $C(N, N)$
 - Jimbo-Miwa : σ -forme de Painlevé VI
 - Déterminants de Toplitz
 - L'opérateur minimal L_N de $C(N, N)$
- 2 Structure des solutions communes à L_N et $P.VI$
 - Calcul effectif : Réduction de Ritt
 - La courbe rationnelle associée - structure de Riccati
- 2 Solutions D -finies de $P.VI$ osculatrices à C_N
- 2 Les corrélations non-diagonales
- 2 conclusion

Modèle d'Ising et D -finitude

Origine du problème : modèle d'Ising en mécanique statistique
(années 20)

programme de travail

Spin \pm : corrélations, représentation probabiliste
représentation intégrale \rightarrow (somme d') objets D -finis :
Utiliser "fortement" la structure D -finie pour mieux comprendre les
objets.

Trouver leur opérateur différentiel linéaire

- analyse de singularités
- propriétés globales (factorisation, etc)
- Groupes de galois différentiels, matrices de connection, etc.

les corrélations $C(N, N)$ du modèle d'Ising 2 – D

Historique (bref) :

- Onsager 1944, Onsager & Kaufman 1949 : solution et expression en terme de déterminants de Toplitz
- Montroll, Potts, Ward (1964) : simplification des résultats de Onsager, introduction de fonctions elliptiques
- Wu, Mac Coy, Tracy, Barouch (1964-1976) propriétés des déterminants, singularités, asymptotique, liens avec Painlevé
- Okamoto, Jimbo, Miwa (fin années 70) : Expression des $C(N, N)$ comme solutions de l'équation de Painlevé VI.
- Gosh et Shrock (84-85) : les $C(N, M)$ vus comme fonctions elliptiques, (petites valeurs).
- Orrick, Nickel, Guttmann, Perk (2001) : D -finitude pour des objets proches.

Contribution :

- systématiser ces résultats sous l'angle D -fini.
- structure de solutions D -finies de Painlevé VI.

Jimbo-Miwa : σ -forme de Painlevé VI

$$\left(t(t-1)\sigma''\right)^2 = N^2 \cdot \left((t-1)\sigma' - \sigma\right)^2 - 4\sigma' \left((t-1)\sigma' - \sigma - 1/4\right) \left(t\sigma' - \sigma\right)$$

Note : pour N entier, Forrester & Witte, Nagoya J. Math, 2004.

Corrélations diagonales $C_N = C(N, N)$ liées à σ :

$$\sigma(t) = t(t-1) \cdot \frac{d}{dt} \log(C_N) - 1/4 = t(t-1) \frac{C'_N}{C_N} - \frac{1}{4}$$

Les corrélations C_N vus comme déterminants de Toeplitz :

$$C(N, N) = \det(a_{i-j}), \quad 1 \leq i, j \leq N \quad (1)$$

where the a_n 's read in terms of ${}_2F_1$ hypergeometric function

$$a_n = -\frac{(-1/2)_{n+1}}{(n+1)!} t^{n/2+1/2} \cdot {}_2F_1\left(1/2, n+1/2; n+2; t\right), \quad n \geq -1$$

$$C(N, N) = \det(a_{i-j}), \quad 1 \leq i, j \leq N \quad (2)$$

where the a_n 's read in terms of ${}_2F_1$ hypergeometric function

$$a_n = -\frac{(-1/2)_{n+1}}{(n+1)!} t^{n/2+1/2} \cdot {}_2F_1\left(1/2, n+1/2; n+2; t\right), \quad n \geq 0 \quad (3)$$

Les ${}_2F_1$ sont D -finies, donc C_N est D -fini.

Theorem

- ① Les $C(N, N)$ satisfont un opérateur différentiel (linéaire) L_N d'ordre $N + 1$.
- ② Il existe un opérateur différentiel R_N d'ordre N tel que $C(N, N) = R_N(E)$ où E fonction elliptique.
- ③ Le groupe de Galois de L_N est $SL(2)$; en fait $L_N \simeq \text{Sym}^N(L_E)$
- ④ Tout ça se calcule explicitement.

Intermezzo : les fonctions elliptiques E et K

$$a_n = -\frac{(-1/2)_{n+1}}{(n+1)!} t^{n/2+1/2} \cdot {}_2F_1\left(1/2, n+1/2; n+2; t\right)$$

$$H_n := \partial^2 - \frac{1}{x}\partial - 1/4 \frac{xn^2 - (n+1)^2}{x^2(x-1)} \text{ vérifie } H_n(a_n) = 0.$$

Opérateurs différentiels isomorphes : $L_1 \sim L_2$ si $L_1.R = S.L_2$

Lemma

$$H_n \sim H_{n-1} : a_n(t) = p_n(t)a_{n-1}(t) + q_n(t)a_{n-1}'(t)$$

Intégrales elliptiques de seconde et première espèce E et K :

$$E = \frac{\pi}{2} {}_2F_1\left([-1/2, 1/2], [1], x\right), \quad K = \frac{\pi}{2} {}_2F_1\left([1/2, 1/2], [1], x\right).$$

$$\text{On a } E' = \frac{1}{2x}(E - K), \quad K' = \frac{1}{2x}\left(\frac{E}{x-1} + K\right).$$

$$\text{Opérateur différentiel de } E : L_E := \partial^2 + \frac{1}{x}\partial - 1/4 \frac{1}{x(x-1)}.$$

groupe de Galois $\text{Gal}(L_E) = SL_2$ (matrices de connection, etc.)

$$\text{Isomorphisme } a_n = \phi_n(E) : a_n = p_n(x)E + q_n(x)E'$$

Isomorphisme $a_n = \phi_n(E)$

Lemma

Il existe un opérateur différentiel R_N d'ordre N tel que $C(N, N) = R_N(E)$

Lemma

Les $C(N, N)$ satisfont un opérateur différentiel (linéaire) L_N d'ordre $N + 1$. De plus, $L_N \simeq \text{Sym}^N(L_E)$

Le groupe de Galois de L_N est $SL(2)$ (représentation explicite)

Fournit une méthode de calcul systématique, écueil de complexité.
(remarque : résultats trouvés en sens inverse : shooting in the dark)

Structure des solutions communes à L_N et "P.VI"

C_N satisfait une EDO du 3ème ordre non-linéaire ("P.VI") et une EDO linéaire d'ordre $N + 1$. Structure des solutions communes ?

Lemma

L'EDO minimale de C_N est d'ordre 2 (toujours)

Preuve : $L_N \sim \text{Sym}^N(L_E)$, $\text{Gal}(L_E) = \text{SL}(2) \rightarrow$ critère de Katz.

Calcul effectif : Réduction de Ritt

$L_N(y) = 0$ ordre $N + 1$, $P_{VI}(y) = 0$ ordre 3.

$$S_N(y).L_N(y) = \left(\sum_{i=0}^{N-2} F_i(y)P_{VI}(y)^{(i)} \right) + R_1(y)$$

R_1 pseudo-reste de L_N par P_{VI} , puis

R_2 pseudo-reste de P_{VI} par R_1 , etc.

Dernier pseudo-reste R non nul : caractérisation des solutions (non-singulières) communes.

$$\left(t(t-1)\sigma''\right)^2 = N^2 \cdot \left((t-1)\sigma' - \sigma\right)^2 - 4\sigma' \left((t-1)\sigma' - \sigma - 1/4\right) \left(t\sigma' - \sigma\right)$$

Corrélations diagonales $C_N = C(N, N)$ liées à σ :

$$\sigma(t) = t(t-1) \frac{C'_N}{C_N} - \frac{1}{4}$$

Eq. de compatibilité R homogène en C_N, C'_N, C''_N :

→ relation d'ordre 1 en σ .

Doit donner une courbe de genre 0, paramétrée par $\frac{E'}{E}$..

La courbe rationnelle associée - structure de Riccati

.. et c'est bien vrai. Pour $N = 2$:

$$\begin{aligned} & (4 S_0 - 3) (64 S_0^3 - 16 (16 t + 1) S_0^2 + 4 (64 t^2 - 16 t - 21) \cdot S_0 + 4) \\ & - 32 t (4 S_0 - 3) (t - 1) (8 t - 1 - 4 S_0) \cdot S_1 \\ & + 256 t^2 (t - 1)^2 S_1^2 = 0 \end{aligned}$$

$$S_0 = \frac{3}{4} \frac{A_2 \cdot u^2 + A_1 \cdot u + A_0}{B_2 \cdot u^2 + B_1 \cdot u + B_0}, \quad (5)$$

$$S_1 = \frac{3}{t} \cdot \frac{(\alpha_1 \cdot u + \alpha_0) \cdot (C_3 \cdot u^3 + C_2 \cdot u^2 + C_1 \cdot u + C_0)}{(B_2 \cdot u^2 + B_1 \cdot u + B_0)^2}$$

Structure différentielle sur la courbe

$$S_1 = \frac{\partial S_0}{\partial u} \cdot \frac{du}{dt} + \frac{\partial S_0}{\partial t} \quad (6)$$

Structure différentielle sur la courbe

$$S_1 = \frac{\partial S_0}{\partial u} \cdot \frac{du}{dt} + \frac{\partial S_0}{\partial t} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} 16 t (t - 1) (6 t^2 - 5 t - 9) \cdot \frac{d u}{d t} = \\ (63 - 135 t - 120 t^2 - 140 t^3 + 192 t^4) \cdot u^2 \\ + 8 (15 + 51 t + 46 t^2 - 60 t^3) \cdot u - 272 - 112 t + 192 t^2 \end{aligned} \quad (8)$$

Permet de retrouver la paramétrisation par une solution d'une équation de Riccati du premier ordre, donc par une dérivée logarithmique de solution d'équation linéaire du second ordre (e.g E).

Solutions D -finies de $P.VI$ osculatrices à C_N

Tentation : extraire des conditions d'existence de solutions de $P.VI$ (ou caractériser les $P.VI$ admettant de telles solutions) en regardant des séries (et analyse de singularités : nb fini de singularités isolées).

L'analyse des L_{N+1} montre qu'on peut avoir des familles à un paramètre de solutions, phénomène de branchement dans l'analyse locale.

Phénomène de solutions osculatrices :

$$L_h = \partial_t^2 + \left(\frac{1}{t} + \frac{1}{2(t-1)} \right) \cdot \partial_t - \frac{1}{4} \frac{N^2}{t^2} + \frac{1}{16(t-1)^2} \quad (9)$$

(isomorphe sur $C(\sqrt{t})$ à L_E , encore...)

Ses solutions sont solutions de $P.VI$ (toujours). Pour N entier : ses solutions en 0 coïncident avec C_N sur les N premiers termes (puis s'écartent).

Les corrélations non-diagonales

Montroll, Potts, Ward (1963) : déterminants pour $C(N, M)$..
donc D-finies aussi.

Les $C(N, M)$ satisfont une double récurrence ("Painlevé discrète").

Theorem

les corrélations non-diagonales sont des polynômes en E et K

Idée : Les corrélations diagonales servent de "conditions de bord" pour la double récurrence", permet d'obtenir les $C(N, M)$ comme expressions rationnelles/algébriques en $C(N, N)$.

Expressions rationnelles en E, E' qui sont D -finies – donc polynômes en E, E' (Singer, 86).

Structure plus compliquée que pour $C(N, M)$, conjectures expérimentales pour l'instant.

Connaitre le groupe de Galois de l'opérateur minimal L_N de C_N a permis de clarifier les propriétés de ces solutions communes entre P.VI et L_N , donne des indications sur la structure de ces solutions

le problème vraiment difficile

Ces corrélations $C(N, M)$ ont trois singularités. Structure de $\sum_{N, M} C(N, M)$?? peut s'aborder de plusieurs angles, structure compliquée des singularités, etc.

→ structure globale, rapport avec la susceptibilité. suite du programme.

Démarche expérimentale active ...



